7. Invarijantni podprostori

(7.01) Invarijantni podprostori

• Neka je T linearni operator na $\mathcal{V}$. Za podprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ kažemo da je *invarijantan podprostor* pod T (u odnosu na operator T) kadgod je $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

• U ovakvim situacijama, T možemo posmatrati kao linearni operator na $\mathcal{X}$ zanemarujući sve ostalo u $\mathcal{V}$ i time ograničiti (restriktovati) T da djeluje samo na vektore iz $\mathcal{X}$. Od sad pa nadalje, ovakav *restriktovan (sužen) operator* ćemo označavati sa $T_{/\mathcal{X}}$. ◇

(7.02) Invarijantni podprostori i predstavljanje pomoću matrice

Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{V}$, i neka su $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ..., $\mathcal{Z}$ podprostori od $\mathcal{V}$ redom sa dimenzijama r_1, r_2, ..., r_k i bazama $\mathcal{B}_\mathcal{X}$, $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$,...,$\mathcal{B}_\mathcal{Z}$. Dalje, pretpostavimo da je $\sum_i r_i = n$ i $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y} ... \cup \mathcal{B}_\mathcal{Z}$ je baza za $\mathcal{V}$.

• Podprostor $\mathcal{X}$ je invarijantan podprostor u odnosu na T ako i samo ako $[T]_\mathcal{B}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}, \quad \text{gdje je } A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}.$$

• Svi podprostori $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$,..., $\mathcal{Z}$, su invarijantni u odnosu na T ako i samo ako $[T]_\mathcal{B}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{r_2\times r_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{r_k\times r_k} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}, \quad B = \left[T_{/\mathcal{Y}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{Y}}, \quad \dots, \quad C = \left[T_{/\mathcal{Z}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{Z}}.$$

◇

(7.03) Trougaoni i dijagonalni blok oblici

Kada je T $n \times n$ matrica, sljedeće dvije tvrdnje su tačne.

• Matrica Q je nesingularna takva da

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B_{r\times q} \\ \mathbf{0} & C_{q\times q} \end{pmatrix}$$

ako i samo ako prvih r kolona u Q generiše invarijantni podprostor u odnosu na T.

• Matrica Q je nesingularna takva da

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{r_2\times r_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{r_k\times r_k} \end{pmatrix},$$

ako i samo ako $Q = (Q_1|Q_2|...|Q_k)$ gdje je Q_i oblika $n \times r_i$, i ako kolone od svake matrice Q_i generišu invarijantan podprostor u odnosu na T. ◇

(ova stranica je ostavljena prazna)

(#) Neka je T proizvoljan linearni operator na vektorskom prostoru V.

(a) Da li je trivijalni podprostor $\{0\}$ invarijantan pod u odnosu na T?

(b) Da li je čitav prostor V invarijantan pod u odnosu na T?

Rj.

Neka je T linearni operator na V. Za podprostor $\mathcal{X} \subseteq V$ kažemo da je invarijantan podprostor pod u odnosu na T kadgod $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ (gdje je $T(\mathcal{X}) = \{T(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$).

a) Trebamo provjeriti da li je $T(\{0\}) \subseteq \{0\}$?

Kako je $\forall x \in \{0\}$ $T(x) \in \{0\}$ to je $\{0\}$ invarijantan pod T.

$$T(0) = T(x-x) = T(x) - T(x) = 0$$

b) $T: V \to V$ što znači $\forall v \in V$ $T(v) \in V$

Drugim riječima $T(V) \subseteq V$.

V jest invarijantan pod T.

#) Opisati sve podprostore koji su invarijantni u odnosu na pod identičnim operatorom I na prostoru $\mathcal{V}$.

Rj:

$$I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

$$I(v) = v \quad \text{za } \forall v \in \mathcal{V}$$

Za podprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ kažemo da je invarijantan podprostor u odnosu na pod operatorom T kadgod $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

Za proizvoljan podprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ imamo da je

$I(x) = x \in \mathcal{X}$ za $\forall x \in \mathcal{X}$ tj. $I(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$

Prema tome za svaki podprostor $\mathcal{X}$, $I(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

Svaki podprostor od $\mathcal{V}$ je invarijantan pod I.

(#) Za $A=\begin{pmatrix}4&4&4\\-2&-2&-5\\1&2&5\end{pmatrix}$, $x_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

pokazati da podprostor $\mathcal{X}$ generisan sa $\mathcal{B}=\{x_1,x_2\}$ je invarijantan podprostor u odnosu na pod A. Poslije toga opisati restrikciju $A_{/\mathcal{X}}$ i odrediti koordinantnu matricu od $A_{/\mathcal{X}}$ u odnosu na $\mathcal{B}$.

Rj.

$$\mathcal{X}=span(\mathcal{B})=span(\{x_1,x_2\})=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2 \mid \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$$

Za proizvoljno $v\in\mathcal{X}$ $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.d. $v=\alpha x_1+\beta x_2$

$$A(v)=Av=A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2 \quad \dots(*)$$

Prema tome da bi odredili da li je $A(v)\in\mathcal{X}$ trebamo pronaći $A(x_1)$ i $A(x_2)$ tačnije trebamo vidjeti da li je $A(x_1)\in\mathcal{X}$ i $A(x_2)\in\mathcal{X}$.

$$A(x_1)=Ax_1=\begin{pmatrix}4&4&4\\-2&-2&-5\\1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=2x_1\in\mathcal{X}$$

$$A(x_2)=Ax_2=\begin{pmatrix}4&4&4\\-2&-2&-5\\1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\overset{(\square)}{=}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\underbrace{x_1+2x_2}_{\in\mathcal{X}}$$

Da li možemo vektor $\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju od x_1 i x_2?

$$\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}2\mu-\eta=0\\-\mu+2\eta=3\\-\eta=-2\end{array} \quad \eta=2 \Rightarrow \mu=1 \quad \dots(\square)$$

Prema $(*)$ za $\forall v\in\mathcal{X}$ $(v=\alpha x_1+\beta x_2)$

$$A(v)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2=2\alpha x_1+\beta x_1+2\beta x_2=(2\alpha+\beta)x_1+2\beta x_2\in\mathcal{X}$$

tj. $\forall v \in \mathcal{X}$ $A(v) \in \mathcal{X}$. Drugim riječima

$$A(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$$

$\mathcal{X}$ je invarijantan podprostor pod A.

Sad odredimo $A_{/\mathcal{X}}$ i $[A_{/\mathcal{X}}]$.

Već smo vidjeli da za $\forall v \in \mathcal{X}$ $A(v) = (2\alpha+\beta)x_1 + 2\beta x_2$ gdje su $\binom{\alpha}{\beta}$ koordinate vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$. Prema tome

$$A_{/\mathcal{X}}(x) = (2\alpha+\beta)x_1 + 2\beta x_2 \quad \text{za svako } x = \alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{X}$$

Dalje

$$[A_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [A_{/\mathcal{X}}(x_1)]_{\mathcal{B}} & [A_{/\mathcal{X}}(x_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$A_{/\mathcal{X}}(x_1) = 2x_1 \quad ; \quad A_{/\mathcal{X}}(x_2) = x_1 + 2x_2 \quad \Rightarrow$$

$$[A_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(#) Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru V i neka je $\mathcal{X}$ podprostor od V čija je dimenzija r i baza $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$. Pokazati da ako je podprostor $\mathcal{X}$ invarijantan podprostor u odnosu na pod T tada $[T]_{\mathcal{B}}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{i u tom slučaju} \quad A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}},$$

gdje je $\mathcal{B}$ baza za V.

Rj: Pa neka je $\mathcal{X}$ invarijantan podprostor pod T i neka je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ baza za $\mathcal{X}$.
Kako je $\mathcal{B}$ baza za V, a $\mathcal{X}$ podprostor od V, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ je samo dio baze $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_q\}$$

čitavog prostora V $(r+q=n)$.
Da bi izračunali $[T]_{\mathcal{B}}$ prisjetimo se definicije koordinatne matrice da

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & & | \\ [T(x_1)]_{\mathcal{B}} & [T(x_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(x_r)]_{\mathcal{B}} & [T(y_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(y_q)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | & | & & | \end{pmatrix} \quad \dots (1)$$

Kako je $\mathcal{X}$ invarijantan podprostor pod T to je svaki $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_r)$ sadržan u $\mathcal{X}$, pa nam samo prvih r vektora iz $\mathcal{B}$ treba da opišemo svaki $T(x_j)$ za $j=1,2,\dots,r$.

$$T(x_j)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}x_i \quad i \quad [T(x_j)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \alpha_{2j}\\ \vdots\\ \alpha_{rj}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \qquad \ldots(2)$$

Prostor $\mathcal{Y}=\operatorname{span}\{y_1,y_2,\ldots,y_q\}$ ne mora biti invarijantan u odnosu na T, pa će svi vektori iz baze $\mathcal{B}$ biti potrebni da predstave $T(y_j)$. Prema tome, za $j=1,2,\ldots,q$

$$T(y_j)=\sum_{i=1}^{r}\beta_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{q}\gamma_{ij}y_j \quad i \quad [T(y_j)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \vdots\\ \beta_{rj}\\ \gamma_{1j}\\ \vdots\\ \gamma_{qj}\end{pmatrix} \qquad \ldots(3)$$

Sad ako iskoristimo (1), (2) i (3) imamo

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1q}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} & \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rq}\\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1q}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{q1} & \cdots & \gamma_{qq}\end{pmatrix}$$

Jednakost $T(x_j)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}x_i$ u (2) znači da

$$[T_{/\mathcal{X}}(x_j)]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \alpha_{2j}\\ \vdots\\ \alpha_{rj}\end{pmatrix} \quad \text{pa} \quad [T_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rr}\end{pmatrix}$$

pa se matrica $[T]_{\mathcal{B}}$ može ~~na~~pisati kao

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[T_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}} & B_{r\times q}\\ 0 & C_{q\times q}\end{pmatrix}.$$

Drugim riječima matrica za T se može napraviti u blok-trougar. obliku kadgod je inv. podprost. prisutan.

Za $T=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&-5&-16&-22\\0&3&10&14\\4&8&12&14\end{pmatrix}$, $g_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ i $g_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$

provjeriti da li je $\mathcal{X}=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}$ invarijantan podprostor pod T, pa onda pronaći nesingularnu matricu Q takvu da $Q^{-1}TQ$ ima blok-trougaoni oblik

$$Q^{-1}TQ=\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right).$$

Rj.: Da bi vektorski prostor $\mathcal{X}=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}$ bio invarijantan pod T potrebno je i dovoljno da

$$T(x)\in\mathcal{X} \quad \text{za} \quad \forall x\in\mathcal{X}$$

Kako je $\mathcal{X}=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}$ to svaki $x\in\mathcal{X}$ ima oblik $x=\alpha g_1+\beta g_2$. Pa da bi odredili $T(x)$ izračunajmo prvo $T(g_1)$ i $T(g_2)$

$$T(g_1)=Tg_1=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\0&-5&-16&-22\\0&3&10&14\\4&8&12&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\\0\end{pmatrix}$$

Da li postoje α i β t.d. $\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\0\end{pmatrix}=\alpha g_1+\beta g_2$

$$\begin{aligned}2\alpha-\beta&=-1\\-\alpha+2\beta&=5\\-\beta&=-3\end{aligned} \Rightarrow \beta=3 \quad \alpha=1 \Rightarrow T(g_1)=g_1+3g_2$$

$$T(g_2) = T_{g_2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da li postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.d. $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2$

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta &= 0 \\ -\alpha + 2\beta &= 6 \\ -\beta &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \beta = 4, \alpha = 2 \quad \Rightarrow T(g_2) = 2g_1 + 4g_2$$

Prema tome za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T(g_1) + \beta T(g_2) = \alpha (g_1 + 3g_2) + \beta (2g_1 + 4g_2)$$

$$= (\alpha + 2\beta) g_1 + (3\alpha + 4\beta) g_2 \in \mathcal{X}$$

$\mathcal{X}$ jest invarijantan u odnosu na T.

Da bi pronašli željenu matricu Q prvo moramo konstruisati proširenje od $\{g_1, g_2\}$ do baze $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ za $\mathbb{R}^4$. Prisjetimo se kako se to radi.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{I_v : 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v + I_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v \cdot \frac{2}{3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{III_v \cdot 3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

prema tome $q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Znamo da:

Neka je T $n \times n$ matrica, Q je nesingularna matrica taka da

$$Q^{-1} T Q = \begin{pmatrix} A_{r \times r} & B_{r \times q} \\ 0 & C_{q \times q} \end{pmatrix}$$

akko prvih r kolona u Q generiše invarijantan podprostor u odnosu na T.

Prema tome $Q^{-1}TQ$ mora biti blok-trougaonog oblika.

Ovo nije teško provjeriti

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Q^{-1}TQ = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 0 & -14 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \end{array}\right)$$

Primjetimo usput da je

$$\left[T/_X \right]_{\{q_1, q_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

\# Neka je data matrica $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix}$ i neka je

$\mathcal{B} = \left\{ g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ baza

za $\mathbb{R}^4$. Obrazložiti odgovore na pitanja

a) Da li su prostori $\mathcal{X} = span\{g_1, g_2\}$ i $\mathcal{Y} = span\{g_3, g_4\}$ invarijantni u odnosu na T.?

b) Da li postoji invertibilna matrica Q takva da je $Q^{-1}TQ$ blok dijagonalna? Ako postoji odrediti tu matricu.

c) Ako je moguće odrediti $[T/\mathcal{X}]_{\{g_1, g_2\}}$ i $[T/\mathcal{Y}]_{\{g_3, g_4\}}$.

Rj.

a) $\mathcal{X} = span\{g_1, g_2\} = \{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

Prostor $\mathcal{X}$ je invarijantan u odnosu na T akko $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ tj. $\{T(x) \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X}$.

U našem slučaju $T(\mathcal{X}) = T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T(g_1) + \alpha_2 T(g_2)$ pa da bi $T(x) \in \mathcal{X}$ za $\forall x \in \mathcal{X}$ potrebno je i dovoljno da $T(g_1)$ i $T(g_2) \in \mathcal{X}$.

$$T(g_1) = Tg_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{za vježbu}}{=\!=} g_1 + 3g_2$$

$$T(g_2) = Tg_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{za vježbu}}{=\!=} 2g_1 + 4g_2$$

Prema tome $\mathcal{X}$ jest invarijantan u odnosu na T.

$Y = \text{span}\{g_3, g_4\} = \{ \beta_1 g_3 + \beta_2 g_4 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \}$.

Kako je $T(\beta_1 g_3 + \beta_2 g_4) = \beta_1 T(g_3) + \beta_2 T(g_4)$ da bi odredili da li je $T(y) \in Y$ za $\forall y \in Y$ potrebno je i dovoljno provjeriti da li je $T(g_3)$ i $T(g_4)$ iz Y.

$$T(g_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} 5 g_3 + 7 g_4$$

$5 - 32 + 22$
$-3 + 20 - 14$
$-8 + 24 - 14$

Provjerimo može li se vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ izraziti kao linearna kombinacija g_3 i g_4?

$$\alpha \underset{g_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} + \beta \underset{g_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\alpha = -5 \\ \alpha = 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2\alpha - \beta = 3 \\ -\beta = -7 \\ \beta = 7 \end{matrix} \quad \ldots (*)$$

$$T(g_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Provjerimo može li se vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ izraziti kao linearna kombinacija g_3 i g_4?

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\alpha = -6 \\ \alpha = 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2\alpha - \beta = 4 \\ -\beta = -8 \\ \beta = 8 \end{matrix} \quad \ldots (**)$$

Prema tome Y jest invarijantan u odnosu na T.

b) Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo.

Neka je T $n \times n$ matrica. Tada Q je nesingularna matrica takva da $Q^{-1} T Q = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{r_k \times r_k} \end{pmatrix}$

akko $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ gde je Q_i oblika $n \times r_i$ i

svaka od kolona Q_i generiše invarijantan podprostor u odnosu na T.

Kako su, u našem slučaju, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ invarijantni u odnosu na T i $\mathcal{X} = \mathrm{span}\{q_1, q_2\}$, $\mathcal{Y} = \mathrm{span}\{q_3, q_4\}$ to prema navedenoj teoremi matrica Q postoji i ona je oblika

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovo možemo proveriti!
Odredimo prvo Q^{-1} pomoću metode Gauss-Jordanovih eliminacija

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III_v + IV_v]{I_v + II_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II_v + (I_v + 2 \cdot III_v)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + III_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III_v + II_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{IV_v + III_v} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Prema tome $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

c) $T_{/X}$ i $T_{/Y}$ imaju smisla zato što su X i Y invarijantni u odnosu na T

$T_{/X}$ čitamo restriktovan operator T na X

$$[T_{/X}]_{\{g_1, g_2\}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T_{/X}(g_1)]_{\{g_1, g_2\}} & [T_{/X}(g_2)]_{\{g_1, g_2\}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

Kako je

$T(g_1) = g_1 + 3g_2$ i $T(g_2) = 2g_1 + 4g_2$ to je

$$[T_{/X}]_{\{g_1, g_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Slično

$$[T_{/Y}]_{\{g_3, g_4\}} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

#) Odrediti sve podprostore od $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rj. Podprostori od $\mathbb{R}^2$ mogu biti dimenzije 0, 1 i 2.

- Trivijalni podprostor $\{\mathbf{0}\}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ je jedini nula-dimenzionalni prostor pa je on i jedini nula-invarijantan podprostor od $\mathbb{R}^2$.

  Podprostor od $\mathbb{R}^2$ koji je dimenzije 2 mora biti sam $\mathbb{R}^2$ (zašto?). Pa je $\mathbb{R}^2$ jedini dvo-dimenzionalni invarijantan podprostor.

Pravi problem predstavlja pronaći sve jedno-dimenzionalne invarijantne podprostore.

Posmatrajmo jednodimenzionalan podprostor $\mathcal{M}$ koji je generisan sa $x \neq 0$ ($\mathcal{M}=\operatorname{span}\{x\}=\{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$) takav da je $A(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Tada

$$Ax \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists \text{ skalar } \lambda \text{ takav da } Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda I)x=0.$$

Drugim riječima $\mathcal{M} \subseteq \ker(A-\lambda I)$. Kako je $\dim \mathcal{M}=1$, mora biti slučaj da $\ker(A-\lambda I) \neq 0$ i λ mora biti skalar takav da je $(A-\lambda I)$ singularna matrica.

Pitanje: Zašto $(A-\lambda I)$ ne smije biti nesingularna matrica?

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{I_v \leftrightarrow II_v}} \begin{pmatrix} -2 & 3-\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{II_v + I_v \cdot \frac{-\lambda}{2}}} \begin{pmatrix} -2 & 3-\lambda \\ 0 & 1+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2} \end{pmatrix}$$

A odavde vidimo da će $A-\lambda I$ biti singularna matrica akko $1+\frac{\lambda^2-3\lambda}{2}=0$ tj. akko je λ korijen od

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Prema tome $\lambda=1$ i $\lambda=2$ i direktno računanje povlači dva jedno-dimenzionalna invarijantna podprostora

$$\mathcal{M}_1 = \ker(A-I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

i $\mathcal{M}_2 = \ker(A-2I) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ i ovo su tražena rješenja

---

Usput, primjetimo da $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$ i $[A]_{\mathcal{B}} = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ gdje $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

U opštem slučaju, skalare λ za koje $(A-\lambda I)$ je singularna zovemo svojstvene vrijednosti od A, i nenula vektore u $\ker(A-\lambda I)$ su poznati kao svojstveni vektori za A. Kao što ovaj primjer pokazuje, svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su od velike važnosti u identificiranju invarijantnih podprostora i u svođenju matrica pomoću transformacija sličnosti.

(#) Neka je T linearni operator na $\mathbb{R}^4$ definisan sa

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2+2x_3-x_4,\ x_2+x_4,\ 2x_3-x_4,\ x_3+x_4)$$

i neka je $\mathcal{X}=\text{span}\{e_1, e_2\}$ podprostor koji je generisan uz pomoć prva dva jedinična vektora u $\mathbb{R}^4$.

(a) Objasniti zašto je $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na T.

(b) Odrediti $[T_{/\mathcal{X}}]_{\{e_1,e_2\}}$.

(c) Opisati strukturu od $[T]_{\mathcal{B}}$, gdje je $\mathcal{B}$ baza dobijena iz proširenja od $\{e_1, e_2\}$.

Rj:

a) $\mathcal{X}=\text{span}\{e_1,e_2\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \Big|\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

Izaberimo proizvoljan $x\in\mathcal{X}$. Tada $\exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ t.d.

$x=\alpha e_1+\beta e_2$.

$$T(x)=T(\alpha e_1+\beta e_2)=\alpha T(e_1)+\beta T(e_2)=$$

$$=\alpha T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}\alpha e_1+\beta(e_1+e_2)=(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2\in\mathcal{X}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=e_1,\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=e_1+e_2\quad\ldots(*)$$

Kako je $T(x)=T\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{pmatrix}=(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2\in\mathcal{X}$ za $\forall x\in\mathcal{X}$ to je podprostor $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na $\mathcal{X}$.

b) $$[T_{/\mathcal{X}}]_{\{e_1,e_2\}}=\begin{pmatrix}| & |\\ [T_{/\mathcal{X}}(e_1)]_{\{e_1,e_2\}} & [T_{/\mathcal{X}}(e_2)]_{\{e_1,e_2\}}\\ | & |\end{pmatrix}$$

Kako je $T(e_1)=e_1$ i $T(e_2)=e_1+e_2$ to je

$$T_{/\mathcal{X}}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{pmatrix}=(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2 \qquad [T_{/\mathcal{X}}]_{\{e_1,e_2\}}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

c) Neka je $\mathcal{B}$ dobijena iz proširenja $\{e_1, e_2\}$ tj. npr. vekt. je $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(e_1)]_{\mathcal{B}} & [T(e_2)]_{\mathcal{B}} & [T(e_3)]_{\mathcal{B}} & [T(e_4)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$[T(e_1)]_{\mathcal{B}} = e_1,$$

$$[T(e_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(e_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(e_4)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Napomena: Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru V i neka su $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots, \mathcal{Z}$ podprostori od V, redom, su dimenzijama $r_1, r_2, \ldots, r_k$ i bazama $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}, \ldots, \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$. Dalje pretpostavimo da $\sum_i r_i = n$ i $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ je baza za V. Tada svi podprostori $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots, \mathcal{Z}$ su invarijantni u odnosu na T akko $[T]_{\mathcal{B}}$ je blok-dijagonalnog oblika

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_{r_k \times r_k} \end{pmatrix}$$

i u tom slučaju $A = [T_{/\mathcal{X}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}}$, $B = [T_{/\mathcal{Y}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}}$, $\ldots$, $C = [T_{/\mathcal{Z}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}}$

(#) Neka su T i Q matrice

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -2 \\ -9 & 0 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \\ 3 & -5 & -13 & 7 \end{pmatrix} \quad i \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Objasniti zašto su kolone od Q baza za $\mathbb{R}^4$.

(b) Provjeriti da li su $\mathcal{X} = span\{Q_{*1}, Q_{*2}\}$ i $\mathcal{Y} = span\{Q_{*3}, Q_{*4}\}$ invarijantni podprostori u odnosu na T.

(c) Opisati strukturu od $Q^{-1}TQ$ bez ikakvog računanja.

(d) Izračunati proizvod $Q^{-1}TQ$ i odrediti

$$[T_{/\mathcal{X}}]_{\{Q_{*1}, Q_{*2}\}} \quad i \quad [T_{/\mathcal{Y}}]_{\{Q_{*3}, Q_{*4}\}}.$$

Rj:

a) Kolone od Q će biti baza za $\mathbb{R}^4$ akko su linearno nezavisne.

$\boxed{\text{kolone od } A \text{ su linearno nezavisne} \quad \text{akko} \quad ker(A) = \{0\} \quad \text{akko} \quad rang(A) = n}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{IV_v + I_v \cdot (-3)}{\overset{\substack{II_v - I_v \\ III_v + I_v \cdot 2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \overset{IV_v + II_v}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{IV_v + III_v \cdot (-7)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(Q) = 4 \Rightarrow \text{kolone su linearno nezavisne}$$

$\Rightarrow$ kolone od Q su baza za $\mathbb{R}^4$.

b) $\mathcal{X} = \text{span}\{Q_{*1}, Q_{*2}\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Da li je $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na T?

$$T \cdot Q_{*1} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -5 & -2\\ -9 & 0 & -8 & -2\\ 2 & 3 & 11 & 5\\ 3 & -5 & -13 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} = Q_{*1}$$

$-2-1+10-6$
$-9+16-6$
$2+3-22+15$
$3-5+26-21$

$$T Q_{*2} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -5 & -2\\ -9 & 0 & -8 & -2\\ 2 & 3 & 11 & 5\\ 3 & -5 & -13 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\2\end{pmatrix} = Q_{*1} + Q_{*2}$$

Kako je proizvoljan $x \in \mathcal{X}$ oblika $x = \alpha Q_{*1} + \beta Q_{*2}$ i
$T(x) = \alpha T(Q_{*1}) + \beta T(Q_{*2}) = \alpha Q_{*1} + \beta(Q_{*1} + Q_{*2}) = (\alpha+\beta) Q_{*1} + \beta Q_{*2}$
to je $\mathcal{X}$ invarijantan u odnosu na T.

$\mathcal{Y}$ jest invarijantan u odnosu na T zato što

$$T(\gamma_1 Q_{*3} + \gamma_2 Q_{*4}) = \gamma_1 T(Q_{*3}) + \gamma_2 T(Q_{*4}) = \gamma_1 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma_4 \begin{pmatrix}0\\3\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$= \gamma_4 Q_{*4} \in \text{span}\{Q_{*3}, Q_{*4}\}$$

OVO ZADNJE RASPISAT ZA VJEŽBU

c) Znamo da:
Neka je T $n\times n$ matrica. Tada Q je nesingularna matrica taka da
$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix}A_{r_1\times r_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & B_{r_2\times r_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & C_{r_k\times r_k}\end{pmatrix}$$
akko $Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$
u kojoj Q_i je $n\times r_i$ i kolone od svakog Q_i generišu invarijantan podprostor u odnosu na T.

Prema navedenoj teoremi $Q^{-1}TQ$ bi trebala biti blok dijagonalna.

d) ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

$$Q^{-1}TQ = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \begin{pmatrix}[T_{/\mathcal{X}}]_{\{Q_{*1}, Q_{*2}\}} & 0\\ 0 & [T_{/\mathcal{Y}}]_{\{Q_{*3}, Q_{*4}\}}\end{pmatrix}$$

Zadaci za vježbu

1. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathcal{V}$, i pretpostavimo da je $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_r,w_1,\dots,w_q\}$ baza za $\mathcal{V}$ takva da $[T]_{\mathcal{B}}$ ima blok-dijagonalni oblik

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} A_{r\times r} & 0 \\ 0 & C_{q\times q}\end{pmatrix}.$$

Objasniti zašto $\mathcal{U}=\operatorname{span}\{u_1,\dots,u_r\}$ i $\mathcal{W}=\operatorname{span}\{w_1,\dots,w_q\}$ moraju biti invarijantni podprostori u odnosu na T.

2. Ako su $T_{n\times n}$ i $P_{n\times n}$ takve matrice da

$$P^{-1}TP=\begin{pmatrix} A_{r\times r} & 0 \\ 0 & C_{q\times q}\end{pmatrix}$$

objasniti zašto su

$$\mathcal{U}=\operatorname{span}\{P_{*1},\dots,P_{*r}\} \quad i \quad \mathcal{W}=\operatorname{span}\{P_{*r+1},\dots,P_{*n}\}$$

invarijantni podprostori u odnosu na T.

3. Ako je A $n\times n$ matrica i λ skalar takav da je $(A-\lambda I)$ singularna, objasniti zašto pridruženi prostor $\ker(A-\lambda I)$ je invarijantan u odnosu na A.

4. Posmatrajmo matricu $A=\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -24 & 11\end{pmatrix}$.
   a) Odrediti svojstvene vrijednosti od A.
   b) Odrediti podprostore od $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na A.
   c) Odrediti nesingularnu matricu Q takvu da je $Q^{-1}AQ$ dijagonalna matrica.